

# Carnegie Mellon University Qatar

3.141592653589793238462643383279  
50288419716939907530681097994463293  
3784826458249165428265145862546429617007  
9871 48806 9120  
988 88807 88808  
45 88220 88222  
17 88559 888  
4582 8810  
8701 5885  
21223 38806  
48829 88804  
8823 88804  
888 88870  
88883 88881  
288728 88223  
88878 38882 71  
888888 88888 88  
823888 888188832888  
211388 878888814127  
378887 888888158  
81488 18288288

Third Annual Pi Day Mathematics Competition

Preliminary Round Question Booklet

2018

Pi Day Mathematics Competition

Rules of the Competition

- This test consists of 40 multiple choice questions. Each question is followed by answers marked A, B, C, D, and E. Only one of these is correct.
- Mark your answer to each problem on the provided answer sheet. For each question, blacken the circle corresponding to at most one answer choice. Completely erase errors and any stray marks. Only answers properly marked on the answer sheet will be graded.
- SCORING: There are three sections in this test.  
Section 1 consists of 25 questions, each one worth one point. Section 2 consists of 10 questions, each one worth two points. Section 3 consists of 5 questions, each one worth three points.  
A correct answer to a question earns the full point value of the question. An incorrect answer carries a penalty of 25% of the point value of the question (that is, there is a penalty of 0.25 for incorrect answers in Section 1, a penalty of 0.5 for incorrect answers in Section 2, and a penalty of 0.75 for incorrect answers in Section 3). You neither win nor lose points for questions that are left unanswered.
- Contestants may **not** consult textbooks, notes, other people (apart from teammates), electronic devices (including calculators, mobile phones, etc.), or any other resources during the test.
- Figures are not necessarily drawn to scale.
- Before beginning the test, please make sure to write the name of your school, your team's name (if you have one) and the names of all members of the team on the answer sheet.
- You have **90 minutes** to complete the test.
- At the end of the 90 minutes, each team should submit one answer sheet.

Section 1

There are 25 questions in this section. Each question is worth 1 point. An incorrect answer carries a penalty of 0.25 points.

- Four teams, consisting of four members each, are invited to CMUQ. If CMUQ chooses at most one speaker from each team to share their experience. In how many ways can CMUQ do this?  
(a) 81                      (b) 256                      (c) 257                      (d) 258                      (e) 625
- Let  $a, b, c$  be positive real numbers satisfying  $\frac{a+b}{c} < \frac{a}{c} + 1$ . Which of the following statement is always correct?  
(a)  $c < b$                       (b)  $b < c$                       (c)  $a < b$                       (d)  $b < a$                       (e)  $a < c$
- If  $x - y = 22$ ,  $y + z = 10$  and  $z - v = 8$ , then  $x - 2y - 2z + v =$  is equal to  
(a) 4                      (b) 12                      (c) 20                      (d) 32                      (e) 40
- If  $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$  and  $b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ , then  $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b+1}$  is equal to  
(a) 1                      (b)  $\sqrt{2}$                       (c)  $2\sqrt{2}+1$                       (d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       (e)  $2 + \sqrt{2}$
- When  $x^{2018} + 1$  is divided by  $x - 1$ , the remainder is:  
(a)  $-1$                       (b) 0                      (c) 1                      (d) 2                      (e) none of these
- $\frac{3^{n+1} + 3^n}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{n-2}}$  is equal to  
(a) 12                      (b) 14                      (c) 16                      (d) 18                      (e) 20
- A water pump running at full capacity can fill an empty swimming pool in 12 hours. If 20 percent of the water being pumped gets diverted for other uses, how many hours would it take for the same empty pool to be filled?  
(a) 15                      (b) 16                      (c) 17                      (d) 18                      (e) 20

8. In a small library, books are either in Arabic or in English. If the ratio of English books to Arabic books is  $\frac{5}{11}$  and the number of English books is more than 400, then what is the minimum number of books in the library?

- (a) 891      (b) 1195      (c) 1296      (d) 1312      (e) 1397

9. Which of the following expression is the most simplified expression equal to

$$\frac{4a^3 + 16a^2}{4a^2 + 12a} \div \frac{a^3 - 16a}{a^2 - a - 12}?$$

- (a) 1      (b) 2      (c)  $\frac{a}{2}$       (d)  $a$       (e)  $a^2$

10. Let  $N$  be the set of positive integers. Let

$$A = \{x \mid 11 \leq x \leq 1200, x = 4n, n \in N\} \text{ and}$$

$$B = \{y \mid 8 < y < 900, y = 6k, k \in N\}.$$

What is the number of elements in  $A \cap B$ ?

- (a) 64      (b) 66      (c) 68      (d) 70      (e) 74

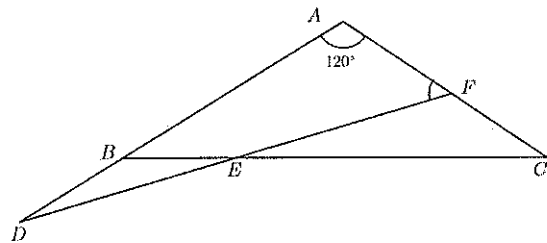
11. What is the remainder when  $3^{2018}$  is divided by 5?

- (a) 4      (b) 3      (c) 2      (d) 1      (e) 0

12. Let  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  and  $a^2 + b^2 = 24$ . Which of the following is a possible value for the product of  $a$  and  $b$ ?

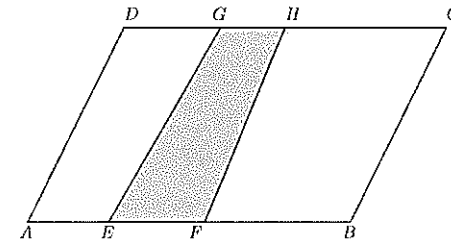
- (a) 4      (b) 6      (c) 8      (d) 10      (e) 12

13. Let  $ABC$  be a triangle and measure of the angle  $BAC$  is  $120^\circ$ . It is also given that  $|AB| = |AC|$  and  $|DB| = |BE|$ , then measure of the angle  $AFD$  is



- (a) 30      (b) 35      (c) 40      (d) 45      (e) 50

14. Let  $ABCD$  be a parallelogram having the area  $80 \text{ cm}^2$ . It is also given that  $|EF| = \frac{1}{4}|AB|$  and  $|GH| = \frac{1}{5}|DC|$ , then area of the polygon  $EFHG$  in  $\text{cm}^2$  is



- (a) 8      (b) 10      (c) 12      (d) 15      (e) 18

15. If  $\cos 3x = \frac{1}{2}$  and  $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , then find the value of  $x$  in degrees?

- (a) 80      (b) 100      (c) 120      (d) 240      (e) 300

16. If  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  and  $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ , then  $x$  is

- (a)  $\frac{\pi}{2}$       (b)  $\frac{\pi}{3}$       (c)  $\frac{\pi}{4}$       (d)  $\frac{\pi}{6}$       (e)  $\frac{\pi}{8}$

17. If  $\log_{49} x = \log_7(x - 2)$  then sum of all  $x$  satisfying the given equation is

- (a) 9      (b) 6      (c) 5      (d) 4      (e) 1

18. Suppose there are 2 white, 4 black and 6 blue marbles in a box. If we draw two marbles out of box at the same time, what is the probability that one of the marble is white and other one is black?

- (a)  $\frac{1}{6}$       (b)  $\frac{1}{11}$       (c)  $\frac{2}{11}$       (d)  $\frac{4}{33}$       (e)  $\frac{5}{33}$

19. The sum of the roots of the equation  $4x^2 - 8x + 5 = 0$  is equal to:

- (a) 8      (b) 2      (c)  $-5/4$       (d)  $-2$       (e) none of these

20. The area of the largest triangle that can be inscribed in a semi-circle whose radius is  $r$  is:

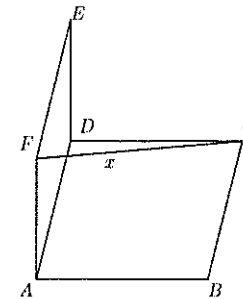
- (a)  $r^2$       (b)  $r^3$       (c)  $2r^2$       (d)  $2r^3$       (e)  $\frac{1}{2}r^2$

21. As the number of sides of a polygon increases from 3 to  $n$ , the sum of the exterior angles formed by extending each side in succession:
- (a) increases (d) increases then decreases  
 (b) decreases (e) decreases then increases  
 (c) remains constant
22. The roots of  $(x^2 - 3x + 2)(x)(x - 4) = 0$  are:
- (a) 4 (b) 0 and 4 (c) 1 and 2 (d) 0, 1, 2 and 4 (e) 1, 2, and 4
23. If the length of a diagonal of a square is  $a + b$ , then the area of the square is:
- (a)  $(a + b)^2$  (b)  $\frac{1}{2}(a + b)^2$  (c)  $a^2 + b^2$  (d)  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  (e) none of these
24. The bottom, side, and front areas of a rectangular box are known. The product of these areas is equal to:
- (a) the volume of the box  
 (b) the square root of the volume  
 (c) twice the volume  
 (d) the square of the volume  
 (e) the cube of the volume
25. If in applying the quadratic formula to the quadratic equation  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  it happens that  $c = b^2/4a$ , then the graph of  $y = f(x)$  will certainly
- (a) have a maximum  
 (b) have a minimum  
 (c) be tangent to the  $x$ -axis  
 (d) be tangent to the  $y$ -axis  
 (e) lie in one quadrant only

**Section 2**

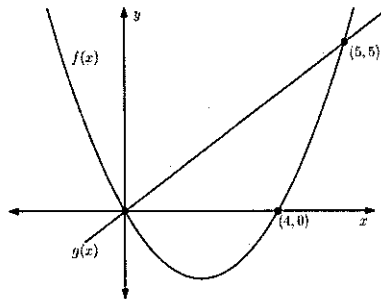
There are 10 questions in this section. Each question is worth 2 points. An incorrect answer carries a penalty of 0.5 points.

1. Let  $\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2$ . What is the value of  $x$ ?
- (a)  $\frac{1}{3}$  (b)  $\frac{4}{3}$  (c) 1 (d) 2 (e)  $\sqrt{2}$
2. The equation  $x^{x^{x^{\dots}}} = 2$  is satisfied when  $x$  is equal to:
- (a) infinity (b) 2 (c)  $\sqrt{2}$  (d)  $\sqrt[4]{2}$  (e) none of these
3. If  $a^x = c^r = b$  and  $a^y = c^s = d$ , then:
- (a)  $xs = ry$  (b)  $\frac{x}{s} = \frac{r}{y}$  (c)  $x + s = r + y$  (d)  $x - r = s - y$  (e)  $x^y = s^r$
4. Let  $n$  be an integer. How many integer solution does the equation  $n^3 + 3n = 199$  have?
- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) infinitely many
5. Let  $|AB| = 4 \text{ cm}$  and  $|FC| = x \text{ cm}$ . If the squares  $ABCD$  and  $ADEF$  are perpendicular to each other and equal in sizes, then what is the value of  $x$ .



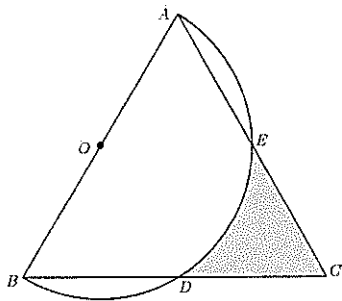
- (a)  $2\sqrt{3}$  (b)  $4\sqrt{2}$  (c)  $3\sqrt{5}$  (d)  $4\sqrt{3}$  (e)  $2\sqrt{5}$

6. Let  $f(x)$  be a quadratic function and  $g(x)$  be a linear function. As indicated in the figure parabola and line intersect at the points  $(0,0)$  and  $(5,5)$ . If  $(4,0)$  is another point on the parabola then value of  $\frac{f \circ g(8)}{f \circ f(2)}$  is



- (a) 2      (b)  $\frac{5}{3}$       (c)  $\frac{4}{3}$       (d) 1      (e)  $\frac{3}{4}$

7. Let  $ABC$  be an equilateral triangle with  $|AB| = 2$ . Given arc is a semi-circle with center  $O$ . What is the shaded area?



- (a)  $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$       (b)  $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$       (c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (d)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$       (e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. In  $\triangle ABC$ ,  $|AB| = 12$ ,  $|AC| = 7$  and  $|BC| = 10$ . If the sides  $AB$  and  $AC$  are doubled while  $BC$  remains the same, then:

- (a) the area is doubled  
 (b) the altitude is doubled  
 (c) the area is four times the original  
 (d) the median is unchanged  
 (e) the area of the triangle is zero

9. An equilateral triangle is drawn with side length  $a$ . A new equilateral triangle is formed by joining the midpoints of the sides of the first one. Then a third equilateral triangle is formed by joining the midpoints of the sides of the second; and so on forever. The sum of the perimeters of all the triangles thus drawn is:

- (a) Infinite      (b)  $6a$       (c)  $21a/4$       (d)  $9a/2$       (e)  $2a$

10. Of the following statements, the one that is incorrect is:

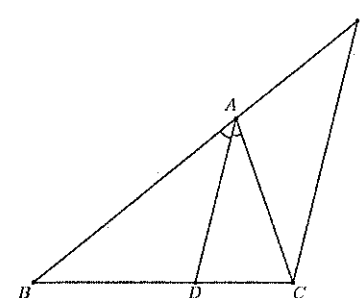
- (a) doubling the base of a given rectangle doubles the area  
 (b) doubling the altitude of a triangle doubles the area  
 (c) doubling the radius of a given circle doubles the area  
 (d) doubling both the numerator and denominator of a fraction does not change the quotient  
 (e) doubling a given quantity may make it less than it originally was

### Section 3

There are 5 questions in this section. Each question is worth 3 points. An incorrect answer carries a penalty of 0.75 points.

1. The following problem is based on Proposition 3 of Book VI of Euclid's *Elements*. The result was used repeatedly by Archimedes to obtain approximations for the value of  $\pi$ . In particular, he proved that  $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ .

In the figure below,  $\angle BAD = \angle DAC$ , sides  $AD$  and  $CE$  are parallel and points  $B, A$  and  $E$  are collinear. The ratio,  $\frac{|BD|}{|DC|}$  is equal to



- (a)  $\frac{|BA|}{|AC|}$       (b)  $\frac{|AB|}{|CE|}$       (c)  $\frac{|AD|}{|CE|}$       (d)  $\frac{|BD|}{|AE|}$       (e)  $\frac{2}{1}$

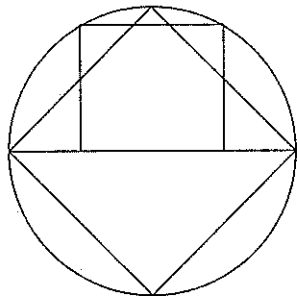
2. If  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  and  $f(3n - 1) = f(n) - 1$ ;  $f(3n) = f(n)$ ;  $f(3n + 1) = f(n) + 1$  for all  $n \geq 1$ , then  $f(2018) =$  is

- (a) 7 (b) 5 (c) 3 (d) 1 (e) 0

3. If  $\frac{xy}{x+y} = a$ ,  $\frac{xz}{x+z} = b$ , and  $\frac{yz}{y+z} = c$ , where  $a, b$ , and  $c$  are not zero, then  $x$  equals:

- (a)  $\frac{abc}{ab+ac+bc}$  (b)  $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$  (c)  $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$  (d)  $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$  (e)  $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$

4. If  $x$  is the area of a square inscribed in a semicircle, then what is the area of a square inscribed in the entire circle?



- (a)  $2x$  (b)  $3x/2$  (c)  $5x/2$  (d)  $4x/3$  (e)  $5x/3$

5. Figures 0, 1, 2, and 3 consist of 1, 5, 13, and 25 non-overlapping unit squares, respectively. If the pattern were continued, how many non-overlapping unit squares would there be in Figure 100?

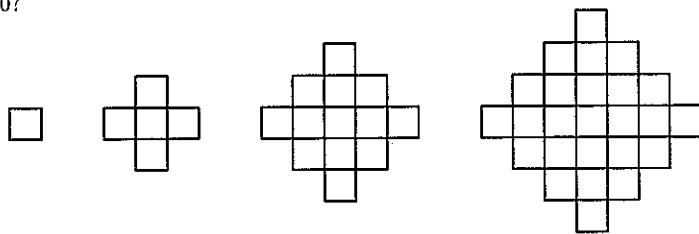
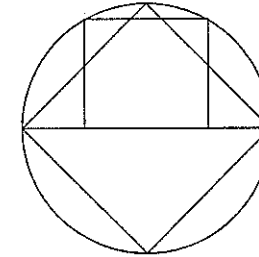


Figure 0      Figure 1      Figure 2      Figure 3

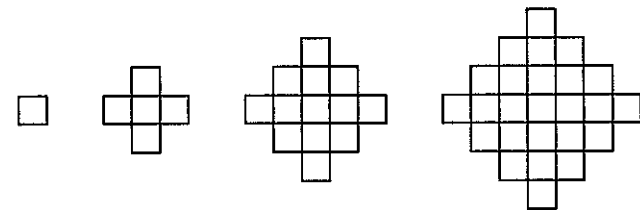
- (a) 10401 (b) 19801 (c) 20201 (d) 39801 (e) 40801

4- إذا كانت  $x$  هي مساحة مربع مرسوم في نصف دائرة، فما مساحة المربع المرسوم في الدائرة الكاملة؟



- (a)  $2x$  (b)  $3x/2$  (c)  $5x/2$  (d)  $4x/3$  (e)  $5x/3$

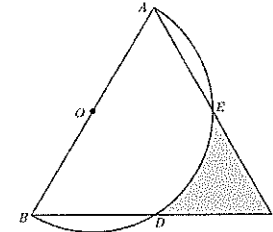
5- الأشكال 0 و 1 و 2 و 3 تتكون من عدد 1 و 5 و 13 و 25 مربع غير متداخل الوحدات، على التوالي. إذا استمر هذا النمط فكم عدد المربعات غير المتداخلة الوحدات التي قد توجد في الشكل (100)؟



الشكل (0)      الشكل (1)      الشكل (2)      الشكل (3)

- (a) 10401 (b) 19801 (c) 20201 (d) 39801 (e) 40801

7- فرضنا أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع والضلع  $|AB| = 2$ ، وقوس الدائرة الموجود هو شبه دائرة مركزها  $O$ . فما هي المنطقة المظللة؟



- (a)  $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$  (b)  $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$  (c)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (d)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$  (e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8- في المثلث  $ABC$ ،  $|AB| = 12$ ،  $|AC| = 7$ ،  $|BC| = 10$ . بما أن الضلعين  $AB$  و  $AC$  مضاعفان، في حين يبقى  $BC$  كما هو، إذن:

- (a) تُضاعف المساحة  
(b) يتضاعف الارتفاع  
(c) تكون المساحة أربعة أضعاف الأصل.  
(d) يظل الأوسط دون تغيير  
(e) تكون مساحة المثلث صفر.

9- مثلث متساوي الأضلاع مرسوم بطول جانبي  $a$ ، وتشكل مثلث متساوي الأضلاع جديد بواسطة ضم نقاط الوسط من أضلاع المثلث الأول. ثم تشكل مثلث متساوي الأضلاع ثالث من خلال ضم نقاط الوسط من أضلاع المثلث الثاني. وهكذا إلى ما لا نهاية. مجموع محيطات جميع المثلثات المرسومة هو:

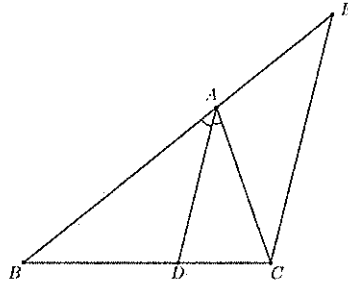
- (a)  $2a$  (b)  $6a$  (c)  $21a/4$  (d)  $9a/2$  (e) عدد غير متناهي

- 10- العبارة غير الصحيحة من بين العبارات التالية هي:  
(a) مضاعفة قاعدة مستطيل معطي مضاعف المساحة  
(b) مضاعفة ارتفاع المثلث يضاعف المساحة  
(c) مضاعفة نصف قطر دائرة معينة يضاعف المساحة  
(d) مضاعفة كل من البسط والمقام لكسر ما لا يغير ناتج القسمة  
(e) مضاعفة كمية معينة قد تجعلها أقل مما كانت عليه في الأصل

القسم الثالث

يحتوي هذا القسم على (5) أسئلة. تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال ثلاث نقاط، وكل إجابة خاطئة تخصم 0.75 نقطة.

1- تستند المسألة التالية إلى المسألة رقم (3) من الباب السادس لعناصر Euclid. وقد استخدم أرشميدس النتيجة كثيرًا للحصول على قيم تقريبية لقيمة  $\pi$ . وأثبت بصفة خاصة أن  $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}$ . في الشكل أدناه،  $\angle BAD = \angle DAC$ ، والضلعان  $AD$  و  $CE$  متوازيان والنقاط  $B$  و  $A$  و  $E$  على نفس الخط المستقيم. فنسبة  $\frac{|BD|}{|DC|}$  تساوي:



- (a)  $\frac{|BA|}{|AC|}$  (b)  $\frac{|AB|}{|CE|}$  (c)  $\frac{|AD|}{|CE|}$  (d)  $\frac{|BD|}{|AE|}$  (e)  $\frac{2}{1}$

2- بما أن  $f(0) = 0$ ،  $f(1) = 1$ ، و  $f(3n-1) = f(n) - 1$ ،  $f(3n) = f(n)$ ،  $f(3n+1) = f(n) + 1$  وكانت  $n \geq 1$  في كل ما سبق، إذن  $f(2018) =$ :

- (a) 7 (b) 5 (c) 3 (d) 1 (e) 0

3- بما أن  $a = \frac{xy}{x+y}$ ،  $b = \frac{xz}{x+z}$ ، و  $c = \frac{yz}{y+z}$ ، وكانت  $a$  و  $b$  و  $c$  لا تساوي صفر، إذن  $x$  تساوي:

- (a)  $\frac{abc}{ab+ac+bc}$  (b)  $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$  (c)  $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$  (d)  $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$  (e)  $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$

21- عندما يزداد عدد أضلاع مضلع من 3 إلى n، فإن قيمة الزوايا الخارجية المكونة بامتداد كل ضلع على التوالي:

(a) تزداد (b) تتناقص (c) تظل ثابتة (d) تزداد ثم تتناقص (e) تتناقص ثم تزداد

22- جذور المعادلة  $(x^2 - 3x)(x)(x - 4) = 0$  هي:

(a) 4 (b) 0 & 4 (c) 1 & 2 (d) 0, 1, 2 & 4 (e) 1, 2 & 4

23- بما أن طول المحور لمربع يساوي  $a + b$ ، إذن مساحة المربع تساوي:

(a)  $(a + b)^2$  (b)  $\frac{1}{2}(a + b)^2$  (c)  $a^2 + b^2$  (d)  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  (e) ليس أي مما ذكر

24- صندوق مستطيل الشكل مساحة القاعدة، الجانب، ومقدمته معروفة، فحاصل ضرب هذه المساحات يساوي:

(a) حجم الصندوق  
(b) الجذر التربيعي للحجم  
(c) ضعف الحجم  
(d) مربع الحجم  
(e) مكعب الحجم

25- عند تطبيق الصيغة التربيعية على المعادلة التربيعية،  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  نجد أن  $c = b^2/4a$ ، إذن فالخط البياني لـ  $y = f(x)$  سيكون بالتأكيد:

(a) له حد أقصى  
(b) له حد أدنى  
(c) تماسي مع المحور x  
(d) تماسي مع المحور y  
(e) يقع في ربعية واحدة فقط

القسم الثاني

يحتوي هذا القسم على 10 أسئلة. تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال نقطتين، وكل إجابة خاطئة تخصم 0.5 نقطة.

1- فرضنا أن  $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} = 2$  فما قيمة x؟

(a)  $\frac{1}{3}$  (b)  $\frac{4}{3}$  (c) 1 (d) 2 (e)  $\sqrt{2}$

2- المعادلة  $x^{2x} = 2$  تكتمل عندما يكون x يساوي:

(a) عددا لا متناهي (b) 2 (c)  $\sqrt{2}$  (d)  $\sqrt[4]{2}$  (e) ليس أي مما ذكر

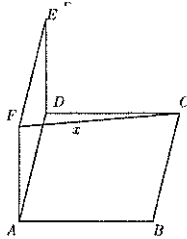
3- بما أن  $a^x = c^r = b$  و  $a^y = c^s = d$ ، إذا:

(a)  $x^s = ry$  (b)  $\frac{x}{s} = \frac{r}{y}$  (c)  $x + s = r + y$  (d)  $x - r = s - y$  (e)  $x^y = s^r$

4- فرضنا أن n عدد صحيح. فكم عددا صحيح يحل المعادلة  $n^3 + 3n = 199$ ؟

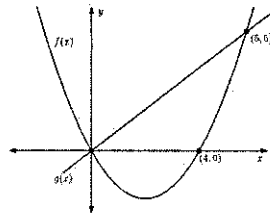
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) كثير لا متناهي

5- فرضنا أن  $|AB| = 4$  cm و  $|FC| = x$ . فإذا كان المربعان ABCD و ADEF متعامدين على بعضهما ومتساويين في الحجم، فما قيمة x.



(a)  $2\sqrt{3}$  (b)  $4\sqrt{2}$  (c)  $3\sqrt{5}$  (d)  $4\sqrt{3}$  (e)  $2\sqrt{5}$

6- فرضنا أن  $f(x)$  دالة تربيعية و  $g(x)$  دالة خطية. كما هو موضح في الشكل، يتقاطع القطع المكافئ و الخط عند النقاط  $(0,0)$  و  $(5,5)$ . إذا كانت  $(4,0)$  هي نقطة أخرى على القطع المكافئ، إذن قيمة  $\frac{f \circ g(8)}{f \circ f(2)}$  تساوي:



(a) 2 (b)  $\frac{5}{3}$  (c)  $\frac{4}{3}$  (d) 1 (e)  $\frac{3}{4}$



9- أي من التعبيرات التالية هو التعبير الأكثر تبسيطاً المساوي لـ  $\frac{4a^3 + 16a^2}{4a^2 + 12a} \div \frac{a^3 - 16a}{a^2 - a - 12}$  ؟

- (a) 1 (b) 2 (c)  $\frac{a}{2}$  (d) a (e)  $a^2$

10- فرضاً أن N هي مجموعة أعداد صحيحة موجبة. وفرضاً أن:

$$A = \{x \mid 11 \leq x \leq 1200, x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{y \mid 8 < y < 900, y = 6k, k \in \mathbb{N}\}$$

وكان ما هو عدد العناصر في  $A \cap B$  ؟

- (a) 64 (b) 66 (c) 68 (d) 70 (e) 74

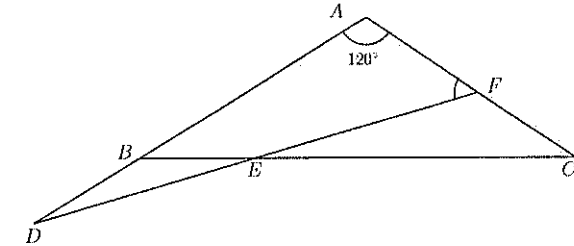
11- ما الباقي عند قسمة  $3^{2018}$  على 5 ؟

- (a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1 (e) 0

12- فرضاً أن  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  و  $a^2 + b^2 = 24$ . فأي مما يلي هي القيمة المحتملة لحاصل ضرب a و b ؟

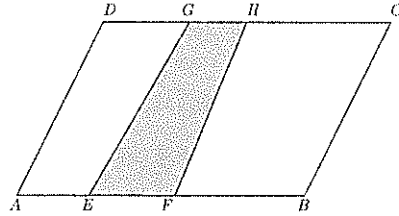
- (a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

13- فرضاً أن ABC هو مثلث وقياس الزاوية BAC يساوي 120 درجة. ومن المعطيات أيضاً أن  $|AB| = |AC|$  و  $|DB| = |BE|$ ، إذن فقياس الزاوية AFD هو:



- (a) 30 (b) 35 (c) 40 (d) 45 (e) 50

14- فرضاً أن ABCD متوازي أضلاع بمساحة 80 سم<sup>2</sup>. ومن المعطيات أيضاً أن  $|EF| = \frac{1}{4}|AB|$  و  $|GH| = \frac{1}{5}|DC|$ ، فإن مساحة المثلث EFHG بالسنتيمتر مربع (سم<sup>2</sup>) تساوي:



- (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 15 (e) 18

15- بما أن  $\cos 3x = \frac{1}{2}$  و  $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أوجد قيمة x بالدرجات؟

- (a) 80 (b) 100 (c) 120 (d) 240 (e) 300

16- بما أن  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  و  $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ ، إذن x تساوي:

- (a)  $\frac{\pi}{2}$  (b)  $\frac{\pi}{3}$  (c)  $\frac{\pi}{4}$  (d)  $\frac{\pi}{6}$  (e)  $\frac{\pi}{8}$

17- بما أن  $\log_{49} x = \log_7 (x - 2)$ ، إذن قيمة x التي تكمل هذه المعادلة تساوي:

- (a) 9 (b) 6 (c) 5 (d) 4 (e) 1

18- فرضاً أن هناك قطعتين بيضاويتين و 4 قطع سوداء و 6 قطع زرقاء من الرخام في صندوق. فإذا سحبنا قطعتي رخام خارج الصندوق في نفس الوقت، فما احتمال أن تكون إحدى قطعتي الرخام بيضاء والأخرى سوداء ؟

- (a)  $\frac{1}{6}$  (b)  $\frac{1}{11}$  (c)  $\frac{2}{11}$  (d)  $\frac{4}{33}$  (e)  $\frac{5}{33}$

19- قيمة جذور المعادلة  $4x^2 - 8x + 5 = 0$  تساوي:

- (a) 8 (b) 2 (c)  $-\frac{5}{4}$  (d) -2 (e) ليس أي مما ذكر

20- مساحة المثلث الأكبر الذي يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها r تساوي:

- (a)  $r^2$  (b)  $r^3$  (c)  $2r^2$  (d)  $2r^3$  (e)  $\frac{1}{2}r^2$

القسم الأول

يحتوي هذا القسم على (25) سؤالاً. تمنح الإجابة الصحيحة على كل سؤال نقطة واحدة، وكل إجابة خاطئة تخصم 0.25 نقطة.

1- وُجّهت الدعوة إلى أربعة فرق - يتكون كل فريق من أربعة أعضاء - للحضور إلى جامعة كارنيجي ميلون في قطر. فإذا اختارت جامعة كارنيجي ميلون في قطر متحدثاً واحداً على الأكثر من كل فريق للمشاركة بتجربته، كم طريقة يمكن بها لجامعة كارنيجي ميلون في قطر للقيام بذلك؟

- (a) 81 (b) 256 (c) 257 (d) 258 (e) 625

2- فرضاً أن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداداً حقيقية موجبة تحقق  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} < \frac{a+b}{c}$ ، أي من العبارات التالية صحيحة دائماً؟

- (a)  $c < b$  (b)  $b < c$  (c)  $a < b$  (d)  $b < a$  (e)  $a < c$

3- إذا كانت  $x - y = 22$  و  $y + z = 10$  و  $z - v = 8$ ، فإن  $x - 2y - 2z + v = ?$

- (a) 4 (b) 12 (c) 20 (d) 32 (e) 40

4- بما أن  $a = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$  و  $b = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ، إذن  $\frac{1}{a - 1} + \frac{1}{b + 1}$  يساوي:

- (a) 1 (b)  $\sqrt{2}$  (c)  $2\sqrt{2} + 1$  (d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (e)  $2 + \sqrt{2}$

5- بما أن  $x^{2018} + 1$  مقسومة على  $x - 1$ ، فإن الباقي هو:

- (a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) لا شيء مما ذكر

6-  $\frac{3^{n+1} + 3^n}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{n-2}}$  تساوي:

- (a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 18 (e) 20

7- مضخة مياه تعمل بكامل طاقتها ويُمكنها ملء بركة سباحة فارغة في 12 ساعة. فإذا تم تحويل 20% من المياه التي يتم ضخها إلى استخدامات أخرى، كم عدد الساعات التي سيستغرقها ملء نفس المساحة الفارغة؟

- (a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18 (e) 20

8- في مكتبة صغيرة، تتوفر الكتب إما باللغة العربية أو باللغة الإنجليزية. فإذا كانت نسبة الكتب بالإنجليزية إلى نسبة الكتب بالعربية هي  $\frac{5}{11}$  وكان عدد الكتب بالإنجليزية أكثر من 400 كتاب، فما هو الحد الأدنى لعدد الكتب في المكتبة؟

- (a) 891 (b) 1195 (c) 1296 (d) 1312 (e) 1397



مسابقة يوم باي في الرياضيات

قواعد المسابقة

- يتكون هذا الاختبار من 40 سؤال متعدد الاختيارات. ولكل سؤال إجابات ذات رموز  $A, B, C, D, E$ . إجابة واحدة فقط هي الإجابة الصحيحة.
- ضع علامة على إجابتك لكل مسألة في ورقة الإجابة المقدمة. عند كل سؤال، لون الدائرة المقابلة للإجابة المختارة. امسح بالكامل أي أخطاء أو علامات أخرى سيتم احتساب الإجابات المعلمة بشكل صحيح فقط على ورقة الإجابة.
- الدرجات : هناك ثلاثة أقسام في هذا الاختبار.
  - القسم الأول ويتكون من 25 سؤال، يعادل كل منهم درجة واحدة
  - القسم الثاني ويتكون من 10 أسئلة، يعادل كل منها درجتين
  - القسم الثالث ويتكون من 5 أسئلة، يعادل كل منها ثلاث درجات
- الإجابة الصحيحة للسؤال تحتسب درجة كاملة. أما الإجابة الخاطئة تحمل في طياتها خصم 25% من درجة السؤال (أي أن هناك خصم 0.25 للإجابات الخاطئة في القسم الأول، خصم 0.5 للإجابات الخاطئة في القسم الثاني، وخصم 0.75 للإجابات الخاطئة في القسم الثالث). أما الأسئلة التي يتم تركها بدون إجابة، فلا تحتسب لها درجات.
- لا يسمح للمتسابقين بالرجوع للكتب أو المذكرات أو مشاوره الآخرين (باستثناء أعضاء الفريق)، ولا باستخدام الأجهزة الإلكترونية (بما في ذلك الآلات الحاسبة، والهواتف المحمولة، الخ)، أو أية موارد أخرى خلال الاختبار.
- الأشكال غير مطابقة بالضرورة لمقياس الرسم الأصلي.
- قبل البدء بالاختبار، يرجى التأكد من كتابة اسم مدرستك، اسم فريقك (إذا كان لديك واحداً) وأسماء جميع أعضاء الفريق على ورقة الإجابة.
- لديك 90 دقيقة لإتمام الاختبار.
- في نهاية الوقت (90 دقيقة)، على كل فريق أن يقدم ورقة إجابة واحدة.

# Carnegie Mellon University Qatar

J.14120261308679338404430832\*  
T02004101405555761008209740440563  
071616206420888682014822342117061  
8021 48884 3130  
825 05647 09284  
84 05930 18222  
17 25350 4881  
2848 1117  
0582 9410  
2786 9383  
21183 30886  
68079 68994  
9321 81964  
4284 10975  
44503 38461  
284764 68273 71  
78678 31657  
2118021 686884 84  
8234823 48810434308848  
3232938 0764024818029  
3724887 06404531888  
827488 332038390

مسابقة الرياضيات السنوية الثالثة ليوم "باي"

كتيب أسئلة الدورة التمهيديّة

٢٠١٨